Klasse 12

1. Schulaufgabe Mathematik

(Thema: Integralrechnung)

Aufgabe 1

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ sind folgende Gleichungen erfüllt

$a)$ $$\int_{-1}^{0} \frac{-1 - ae^{-x}}{2e^{-x}} dx = -0{,}5$$

$b)$ $$\int_{a}^{1{,}5} 0{,}25 \cdot x^5 dx = -30$$

und begründen Sie es geometrisch

$c)$ $$\int_{-a}^{a} 6{,}25 - 2x^4 dx = 0$$

$d)$ $$\int_{-a}^{a} \frac{3}{8}x^2 - 1{,}5dx = -4$$

$e)$ $$\int_{-a}^{a} -3x^3 + 2xdx = 0$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-3)^2 e^{0,5x}$

Die Graphen der Funktion $f(x)$; ihrer 1. Ableitung $f'(x)$; ihrer 2. Ableitung $f''(x)$; ihrer Stammfunktion $F(x)$ und der Funktion $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ sind in den Bildern 1 – 5 dargestellt.

a) Begründen Sie, dass nur Bild 1 die Funktion $f(x)$ darstellen kann. Ordnen Sie die Funktion $f'(x)$; $f''(x)$, $F(x)$ und $g(x)$ den übrigen Bildern zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit Argumenten.

b) Begründen Sie, ob $F(x)$ (k)eine Integralfunktion von $f(x)$ ist.

Bild 1:

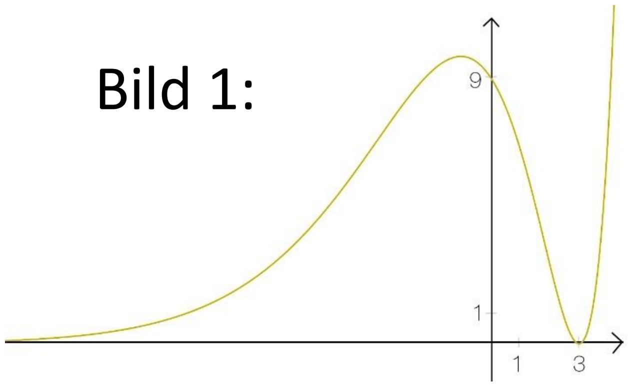


Bild 2:

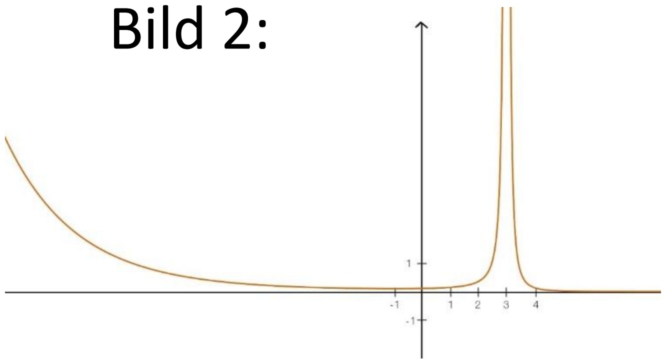


Bild 3:

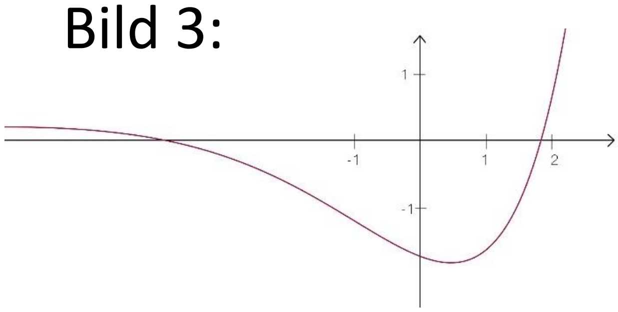


Bild 4:

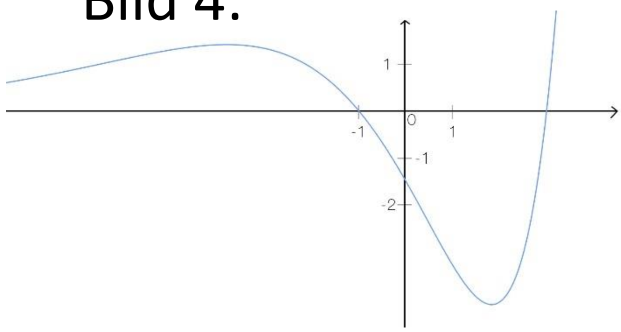
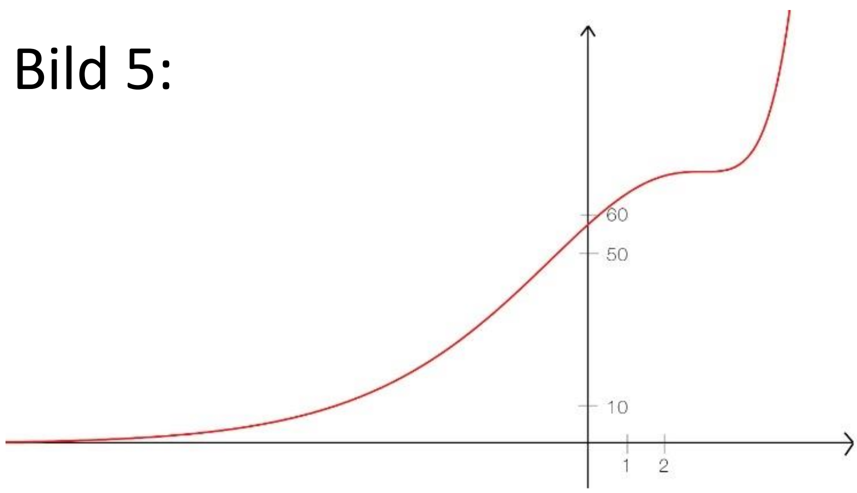


Bild 5:



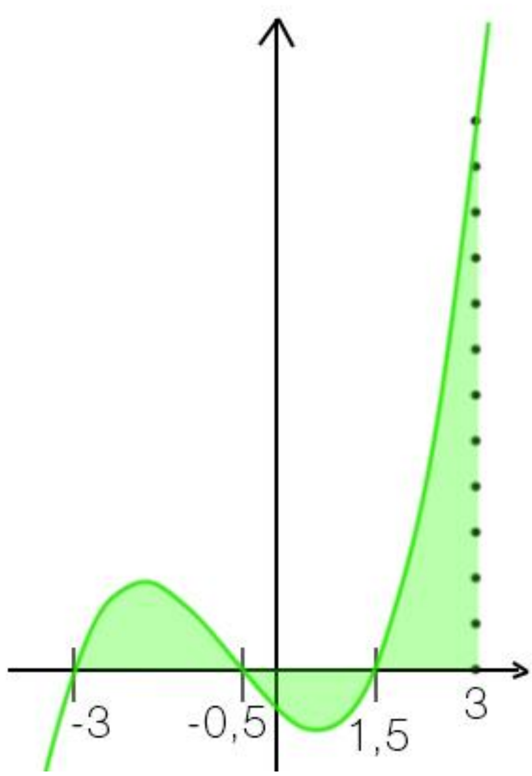
Aufgabe 3

Das Bild zeigt den Graphen der Funktion $f(x)$. Erklären Sie, ob der Wert des Integrals

$$\int_{-3}^{+3} f(x)dx$$

dem markierten Flächeninhalt entspricht.

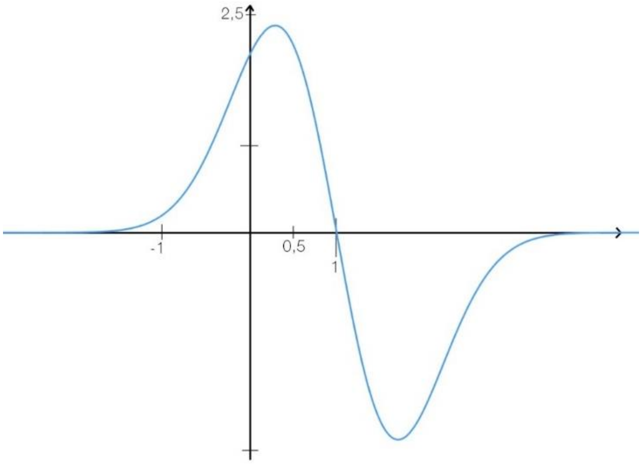
Falls nötig, ändern Sie die Funktion $f(x)$ so ab, dass der Integralwert und der Flächeninhalt übereinstimmen würden (keine Rechnung).



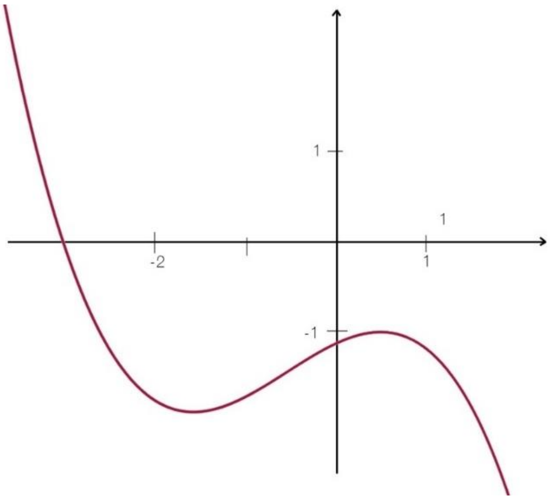
Aufgabe 4

Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x)$. Zeichnen Sie noch den Graphen einer möglichen Stammfunktion $F(x)$ ein, sowie den Graphen der Ableitung $f'(x)$.

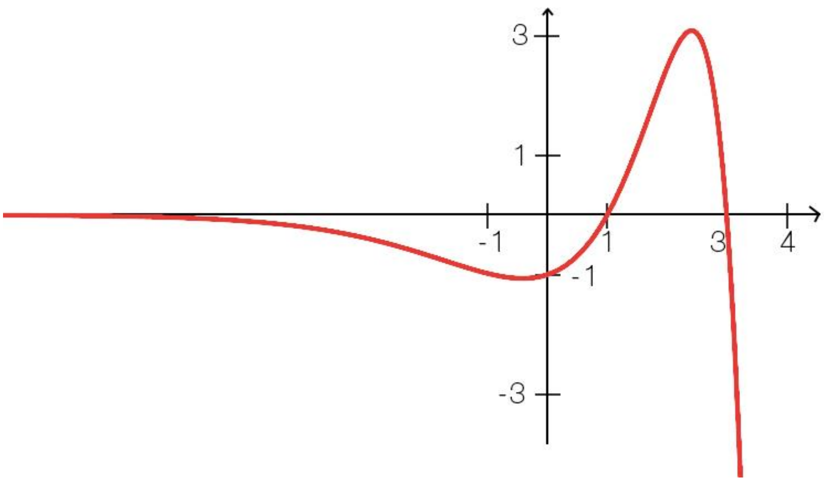
a)



b)



c)

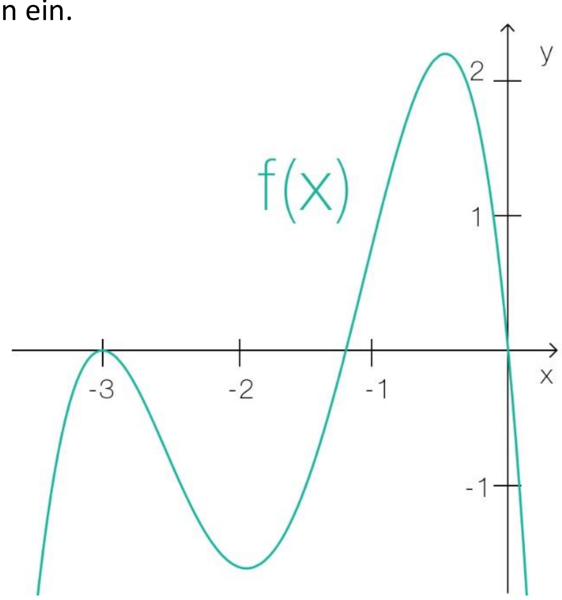


Aufgabe 5

Zeichnen Sie zu den gegebenen Graphen der Funktionen $f(x)$, g(x) und $h(x)$ auch noch die Graphen der Integralfunktionen ein.

a)

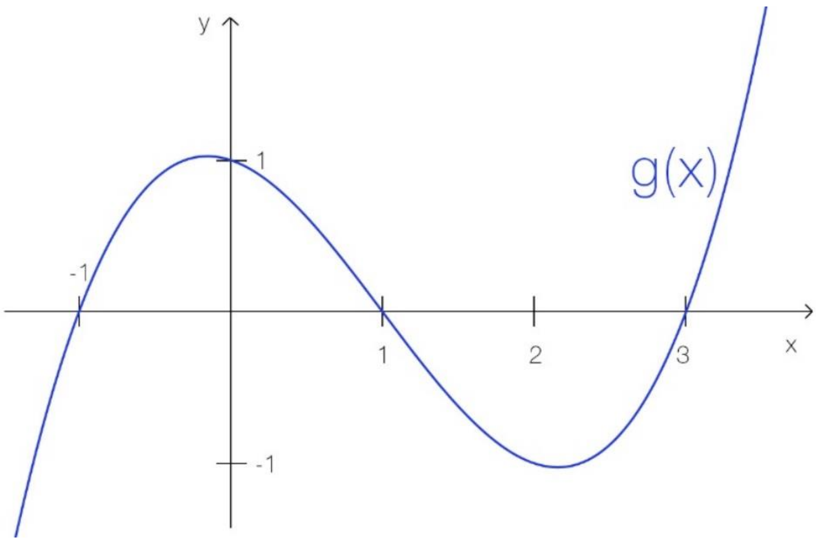
$$I_{-1,5}(x) = \int_{-1,5}^{x} f(t)dt$$



b)

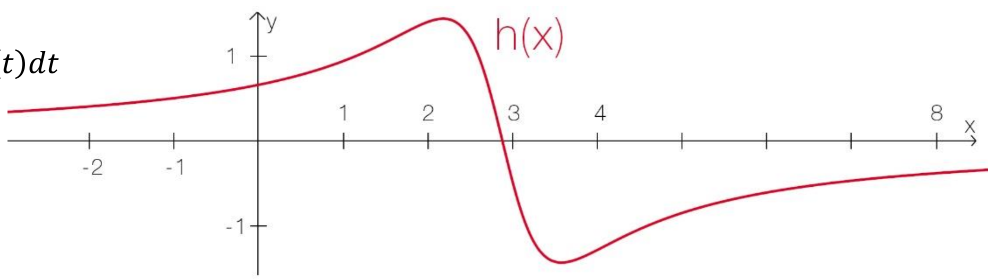
1) $I_2(x) = \int_{2}^{x} g(t)dt$

2) $I_x(x) = \int_{x}^{0} g(t)dt$

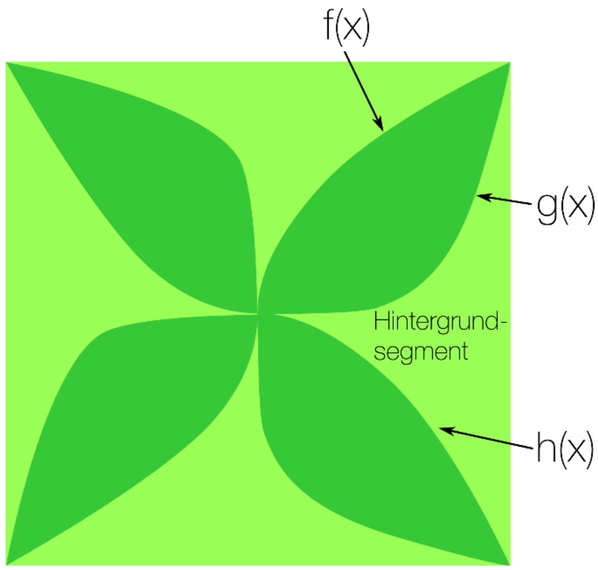


c)

$$I_2(x) = \int_{2}^{x} g(t)dt$$



Aufgabe 6



Gegeben ist der Logo-Entwurf für ein neues BIO-LABEL. Die „Blätter“ sind rationssymmetrisch um den Mittelpunkt.
Das rechte obere Blatt wird gebildet durch die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^5$. Die Quadratische Umrandung hat eine Seitenlänge von 2 LE.

Hinweis:
Verwenden Sie ein geeignetes Koordinatensystem.

a) Begründen Sie, warum die obere Begrenzung des rechten unteren Blattes die Funktion $h(x) = -x^2$ sein muss.

b) Berechnen Sie die Fläche eines Blattes und eines der Hintergrundsegmente. Was stellen Sie fest?
Hinweis:
Verwenden Sie die vorteilhafteste Variante hierfür.

c) Für die Blätter werden noch zwei Alternativen vorgeschlagen:

Sie nur durch die Funktion

Variante A
$f^*(x) = \sqrt{x}$ und $g^*(x) = x^2$

bzw.

Variante B
$f^{**}(x) = \sqrt[5]{x}$ und $g^{**}(x) = x^5$ bilden zu lassen.

Um wieviel Prozent würde sich die Fläche bei beiden Varianten unterscheiden?

Aufgabe 7

Geben Sie zu folgenden Funktionen, jeweils eine mögliche Stammfunktion an ($\mathbb{D} = \mathbb{D}_{max}$)

a)

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + \frac{5}{x^2}$$

b)

$$g(x) = \ln x^3 - \frac{1}{x^2}$$

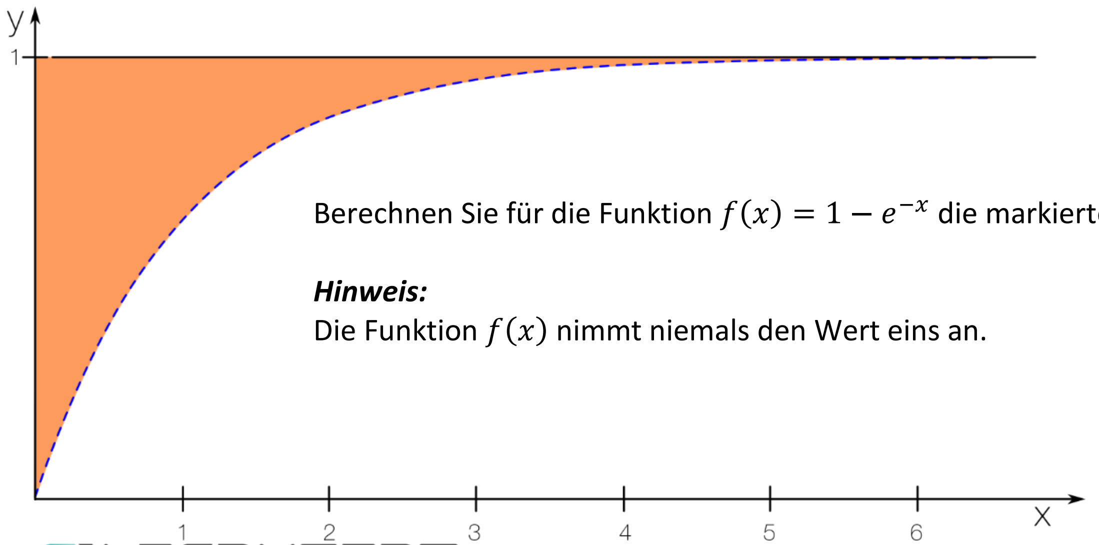
c)

$$h(x) = \frac{2x + 6}{0{,}5x^2 + 3x - 2}$$

Aufgabe 8

Gegeben ist $f(x) = \cos 4t$
Bestimmen Sie die Integralfunktion für $f(x)$ zur unteren Grenze $\frac{\pi}{2}$ und berechnen Sie dann deren Wert für die obere Grenze $x = \frac{3}{8}\pi$.

Aufgabe 9



Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = 1 - e^{-x}$ die markierte Fläche.

Hinweis:
Die Funktion $f(x)$ nimmt niemals den Wert eins an.

Aufgabe 10

Berechnen Sie zu den gegebenen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die im angegebenen Intervall I von ihnen eingeschlossene Fläche.

a) $f(x) = 0{,}25x^2 - 2{,}5x + 4{,}25$

$g(x) = x - 4$

$I = [-1;\ 11]$

b) $f(x) = x^3 - x$

$g(x) = 1 - x^2$

$I = [untere\ Integralgrenze, obere\ Integralgrenze]$

c) $f(x) = x^3 - x$

$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$I = [-1;\ 1]$

Geben Sie ohne weitere Rechnung den exakten Wert der eingeschlossenen Fläche an.

Hinweis:
Quadrieren Sie die beiden Seiten der Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$ und formen Sie die Gleichung so um, dass diese einen geometrischen Ort beschreibt, für welchen man die Schnittfläche leicht angeben kann.

