Klasse 11

2. Schulaufgabe Mathematik

(Thema: Raumgeometrie)

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte

$A\,(\,2\,|\,12\,|\,4\,);\;\; B\,(\,4\,|\,22\,|\,6\,);\;\; C\,(-6\,|\,20\,|\,8\,);\;\; S\,(\,0\,|\,14\,|\,14\,)$

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
b) Brechen Sie seinen Umfang.
c) Berechnen Sie alle Innenwinkel.
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
e) Berechnen Sie die Seitenmittelpunkte.
f) Berechnen Sie den Schnittpunkt S_M der Seitenhalbierenden auf zwei verschiedene Arten.
g) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS mit der Grundfläche ABC und Spitze S.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte

$A\,(\,2\,|\,12\,|\,4\,);\;\; B\,(\,4\,|\,22\,|\,6\,);\;\; C\,(-6\,|\,20\,|\,8\,)$

a) Das Dreieck ABC soll zu einem Parallelogramm ergänzt werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.
b) Die Pyramide ABCDS hat ein Volumen von 288 VE. Berechnen Sie den senkrechten Abstand des Punktes S von dem Parallelogramm ABCD.

   Hinweis:
   Das Dreieck ABC hat einen Flächeninhalt von 50,91 FE.

c) Außer dem Punkt S (0 | 14 | 14) gibt es noch einen weiteren möglichen Punkt S'. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

   Hinweis:
   Die Pyramide ABCDS ist eine gerade Pyramide – der Punkt S liegt also genau senkrecht über der Mitte der Strecke [AC] bzw. [BD].
   Der Mittelpunkt hat die Koordinaten M (-2 | 16 | 6)

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte

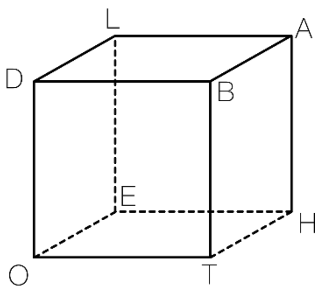
$A\ (9\,|\,3\,|\,2\,);\ \ B\ (\,13\,|\,7\,|\,0\,);\ \ C_k\ (9-4k\ |\ 6+2k\ |{-1}-4k\ )\ mit\ k\in\mathbb{R}$

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC_k für $k\neq -0{,}5$ gleichschenklig ist.
b) Finden Sie einen Wert von k, für den das Dreieck gleichseitig ist.
c) Finden Sie einen Wert von k, für den das Dreieck rechtwinklig ist.

Der Punkt C sei jetzt ein beliebiger Punkt im $\mathbb{R}^3$, der nicht auf der Strecke $[AB]$ liegt.

d) Finden Sie einen Punkt C, so dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist. Wie viele Punkte C mit der gesuchten Eigenschaft gibt es und wo liegen diese Punkte? Geben Sie seinen geometrischen Ort in mathematischer Kurzschreibweise an, **ohne eine weitere Rechnung auszuführen.**

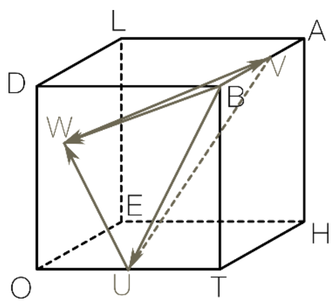
Aufgabe 4



Gegeben sind von dem Würfel THEOBALD die Punkte

$O\ (0\,|\,0\,|0\,);\ \ E\ (-6\,|\,0\,|0\,);\ \ D\ (0\,|\,0\,|6\,)\ und\ T\ (\,0\,|6\,|\,0)$

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte H, A, L, B an.



b) U halbiert die Strecke $[OT]$
V halbiert die Strecke $[AB]$
W ist Mittelpunkt der Fläche ELDO

- Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{BV}, \overrightarrow{BU}, \overrightarrow{UW}, \overrightarrow{VW}$ und $\overrightarrow{BW}$ als

  Linearkombination der drei Vektoren

  $\vec{t}=\overrightarrow{OT}, \vec{e}=\overrightarrow{OE}$ und $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$ an,

  und überprüfen Sie die jeweiligen Gleichungen durch das Einsetzen der konkreten Werte auf ihre Richtigkeit.

- Berechnen Sie das Volumen der Pyramide UVWB.

c) Berechnen Sie den Radius einer Kugel, so dass THEOBALD sie von innen her mit seinen Eckpunkten berühren kann.

d) Berechnen Sie die Oberfläche einer Kugel, die THEOBALD von innen an allen seinen Außenflächen berührt.
Wieviel Prozent der Würfeloberfläche sind dies?

Prüfen Sie nach, ob der Punkt X (-1 | 1 | 4) auf der Kugel liegt. Wenn ja, berechnen Sie den Punkt Y sodass die Strecke $[XY]$ ein Durchmesser der Kugel ist und beweisen Sie dies.

e) Der Schnittpunkt M der Raumdiagonalen von THEOBALD ist auch gleichzeitig der Mittelpunkt einer Kugel, deren Schnittkreise mit seinen Außenflächen einen Durchmesser von 4,5 LE haben. Bestimmen Sie den Radius r der Kugel.

f) In welchen Punkten schneidet eine Kugel $K\colon \left[\vec{X} - \vec{M}\right]^2 = 5{,}5^2$ die Koordinatenachsen.

Aufgabe 5

1)

Bestimmen Sie den Lösungsvektor $\vec{x}$ der Vektorgleichung

a)

$$6\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} - 1{,}5\vec{x} = 9\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

b)

$$6\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix} + 4\vec{x}$$

2)

Falls möglich: Berechnen Sie den Wert von t.

a)

$$\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} = 2t\begin{pmatrix}2\\-6\\-1\end{pmatrix}$$

b)

$$t\begin{pmatrix}-1\\-6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

c)

$$1{,}5\begin{pmatrix}-3\\-7\\-2\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} - 3t\begin{pmatrix}3\\-9\\-6\end{pmatrix}$$

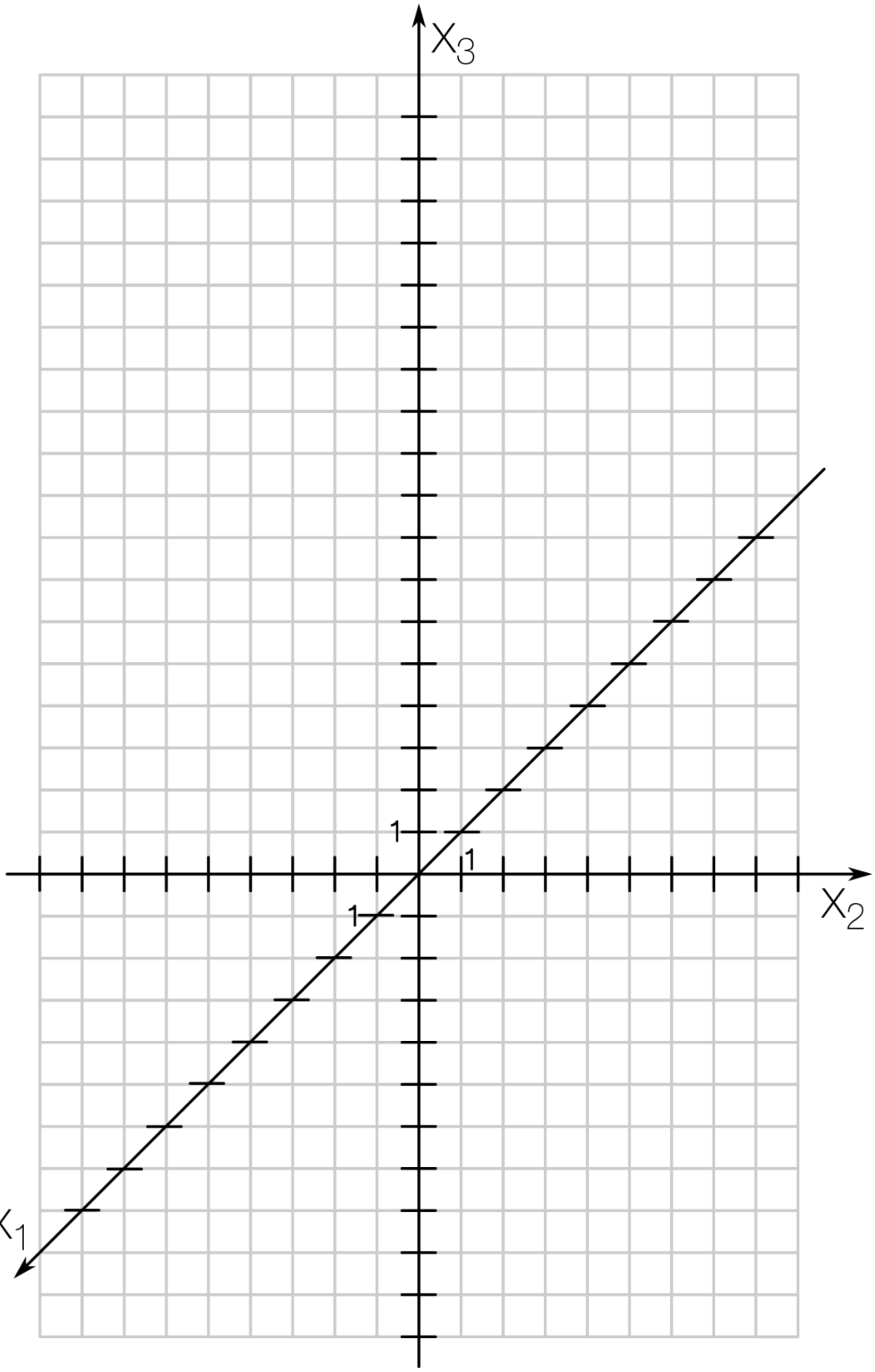
d)

$$\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte A (6 | 2 | 2) ; B (-2 | 6 | 2) und C (-6 | -2 | 2)

a) Zeichnen Sie die Punkte in das beiliegende Koordinatensystem.



b) Begründen Sie durch Rechnung, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat und gleichschenklig ist.

c) Beschreiben Sie, welche besondere Lage das Dreieck ABC im dreidimensionalen Raum hat

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist und berechnen Sie dessen Fläche (Kreuzprodukt)
Tragen Sie das Quadrat in das beiliegende Koordinatensystem ein.

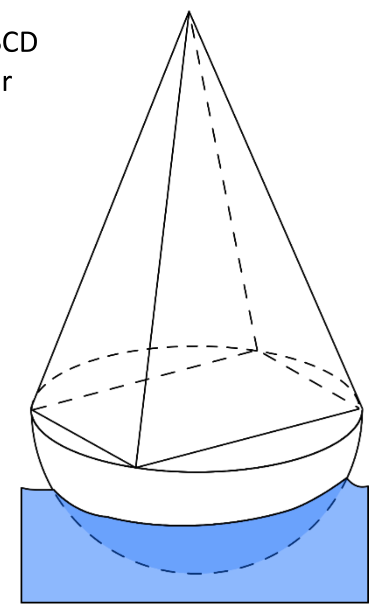
e) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M des Quadrates ABCD und tragen Sie ihn in das Koordinatensystem ein.

f) Das Quadrat ABCD soll nun die Grundfläche einer geraden und regelmäßigen Pyramide sein. Bestimmen Sie jetzt die Koordinaten der Spitze S so, dass sie 15 LE von dem Quadrat ABCD entfernt ist.
Zeichnen Sie die Pyramide in das Koordinatensystem ein.

g) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle ASC$.

h) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS auf zwei verschiedene Arten.

i) Die Pyramide ABCDS ist das Gehäuse einer Heulboje, die Schiffe vor einer Untiefe warnen soll.
Dazu wird das Gehäuse mit seinen vier Ecken ABCD so auf einem halbkugelförmigen Schwimmkörper befestigt, dass seine Ecken genau am Rand der Querschnittsfläche der Halbkugel liegen.



Berechnen Sie den (kleinstmöglichen) Radius dieser Halbkugel und geben Sie deren Kugelgleichung an.

j) Die x_1x_2-Ebene stellt den späteren Wasserspiegel dar. Die Boje soll auf Höhe der Wasserlinie mit einem Gummiring („Fender“) gegen Treibgut geschützt werden.

Geben Sie dessen Kreisgleichung und Umfang an der Innenseite an.

Aufgabe 7

Welcher Winkel ist zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ($\vec{u}, \vec{v} \neq 0$) und welche Beziehung gilt zwischen den Vektoren? Ordne zu!
(Mehrfachbelegung möglich)

a) Ordne die linke Spalte der rechten Spalte zu!

1. $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert = \lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert$	A) $\vec{u}, \vec{v}$ beliebig lang
2. $\lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert = \frac{1}{3}\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert$	B) $\lvert\vec{v}\rvert = \frac{1}{2}\lvert\vec{u}\rvert$
3. $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert = \lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert$	

Begründen Sie anhand einer Skizze.

b) Für welchen eingeschlossenen Winkel wird diese Gleichung richtig, wenn gilt:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$$\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2$$

Begründung mit Skalarprodukt und binomischen Formeln.